

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

Examenul de bacalaureat național Proba E. c) Matematică *M_mate-info*

Test de antrenament 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10

Subiectul I

- $n = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6}$ (3p)
 $n = 10 \in \mathbb{N}$ (2p)
- $m < 0$ $f(x) = 0$ nu are nici o soluție. $m = 0$ $f(x) = 0$ are o singură soluție.
 $m > 0$ $f(x) = 0$ are două soluții distincte (3p)
Deci $m > 0$ (2p)
- $x > 0, x \neq 2$ și atunci $|x - 2| = x$ (3p)
 $x = 1$ (2p)
- Număr cazuri favorabile 22, număr cazuri posibile 900 (3p)
 $p = \frac{11}{450}$ (2p)
- Dreapta d este prima bisectoare, iar $A \in (Ox)$ (3p)
de unde simetricul are coordonatele $A''(0,2)$ (2p)
- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 2$ (3p)
 $\sin 2x = 1$ (2p)

Subiectul II

- a) $D(1,1, -2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (3p)
 $D(1,1, -2) = 0$ (2p)
- b) $A(x, x, 1)$ este inversabilă $\Leftrightarrow D(x, x, 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} \neq 0$
 $\Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 - 2x + 1) \neq 0$ (3p)
De unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ (2p)
- c) $D(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ (3p)
 $D(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$ (2p)
- a) $2(x + 1)(y + 1) - 1 = 2xy + 2x + 2y + 2 - 1$ (3p)
de unde $x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1$ (2p)
- b) $a = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $b = -1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (3p)
 $a * b = 1 \in \mathbb{Z}$ (2p)
- c) Prin inducție $x_n = 2^{n-1}(a + 1)^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3p)
 $x_{2022} = 2^{2021}(a + 1)^{2022} - 1$ (2p)

Subiectul III

- a) g derivabilă pe $[0, \infty)$: $g'(x) = 1 + x$ (3p)
 $g''(x) = 1$ (2p)
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^3}$, nedeterminare $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1p)
Se aplică L'Hospital de două ori și se obține limita $\frac{1}{6}$ (2p+2p)
- c) Fie $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $h(x) = f(x) - g(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

Atunci $h'(x) = e^x - 1 - x$ și $h''(x) = e^x - 1$.

Cum $h''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow h'$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și cum $h'(0) = 0$

deducem că $h'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$ (3p)

Același raționament conduce la $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$, de unde concluzia. (2p)

2. a) Avem $\int xf(x)dx = \int x(1 - \sqrt{x})dx =$ (2p) =

$$= \int (x - x\sqrt{x})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+\frac{3}{2}} \cdot x^{1+\frac{3}{2}} + c \quad (3p)$$

b) Dacă $G \in \int f(x)dx$ atunci $G''(x) = f'(x) \quad \forall x \in (0,1)$ (2p)

și cum $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow G$ este concavă pe $(0,1)$ (3p)

c) $\int_0^1 [x \cdot f(x)]^{2021} dx \leq \frac{1}{2022}.$

$$x \cdot f(x) \leq x, \quad \forall x \in [0,1] \quad (2p)$$

$$\int_0^1 [x \cdot f(x)]^{2021} dx \leq \int_0^1 x^{2021} dx = \frac{x^{2022}}{2022} \Big|_0^1 = \frac{1}{2022} \quad (3p)$$